ADS 2 příklady na cvičení

25. 11. 2020

Některé z následujících příkladů jsou řešené v Průvodci labyrintem algoritmů. Body dávám za srozumitelné přednesení řešení ostatním.

1. Je-li x reálný vektor z $\mathbb{R}^n$, jeho Fourierův obraz $y = F(x)$ je antisymetrický: $y_j = \overline{y_{n-j}}$ pro všechna j. (Připomínáme, že vektory indexujeme modulo n, takže $y_n = y_0$.)

2. Dokažte "inverzní" tvrzení k předchozímu úkolu: DFT antisymetrického vektoru je vždy reálná.

3. V dalších úlohách zvolme pevné n a $\omega = e^{2\pi i/n}$. Označíme e^k, s^k a c^k vektory získané navzorkováním funkcí $e^{2k\pi ix}$, $sin(2k\pi x)$ a $cos(2k\pi x)$ (komplexní exponenciála, sinus a cosinus s frekvencí k) v n bodech intervalu $[0, 1)$.

   Ukažte, že Fourierův obraz vektorů e^k, s^k a c^k vypadá pro $0 < k < n/2$ následovně:

   - $F(e^k) = (0, \ldots, 0, n, 0, \ldots, 0)$,
   - $F(s^k) = (0, \ldots, 0, n/2i, 0, \ldots, 0, -n/2i, 0, \ldots, 0)$,
   - $F(c^k) = (0, \ldots, 0, n/2, 0, \ldots, 0, n/2, 0, \ldots, 0)$,

   přičemž první vektor má nenulu na pozici $n - k$, další dva na pozicích k a $n - k$.

   Zatímco vztah pro $F(e^k)$ funguje i s $k = 0$ a $k = n/2$, siny a cosiny se chovají odlišně: s^0 i $s^{n/2}$ jsou nulové vektory, takže $F(s^0)$ a $F(s^{n/2})$ jsou také nulové; c^0 je vektor samých jedniček s $F(c^0) = (n, 0, \ldots, 0)$ a $c^{n/2} = (1, -1, \ldots, 1, -1)$ s $F(c^{n/2}) = (0, \ldots, 0, n, 0, \ldots 0)$ s n na pozici $n/2$.

4. Pro každý x reálný vektor z $\mathbb{R}^n$ existují reálné koeficienty $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n/2}$ a $\beta_0, \ldots, \beta_{n/2}$ takové, že:

$$x = \sum_{k=0}^{n/2} \alpha_k c^k + \beta_k s^k$$

   Tyto koeficienty jdou navíc vypočíst z Fourierova obrazu

$$y = F(x) = (a_0 + b_0 i, \ldots, a_{n-1} + b_{n-1} i)$$

   takto:

   $\alpha_0 = a_0/n$,

   $\alpha_j = 2a_j/n$ pro $j = 1, \ldots, n/2$,

   $\beta_0 = \beta_{n/2} = 0$,

   $\beta_j = -2b_j/n$ pro $j = 1, \ldots, n/2 - 1$

5. Konvoluce vektorů x a y je vektor $z = x * y$ takový, že $z_j = \sum_k x_k y_{j-k}$, přičemž indexujeme modulo n. Tuto sumu si můžeme představit jako skalární součin vektoru x s vektorem y napsaným pozpátku a zrotovaným o j pozic. Konvoluce nám tedy řekne, jak tyto "přetočené skalární součiny" vypadají pro všechna j. Dokažte následující vlastnosti:

   a) $x * y = y * x$ (komutativita)

   b) $x * (y * z) = (x * y) * z$ (asociativita)

   c) $x * (\alpha y + \beta z) = \alpha(x * y) + \beta(x * z)$ (bilinearita)

   d) $F(x * y) = F(x) \odot F(y)$, kde $\odot$ je součin vektorů po složkách. To nám dává algoritmus pro výpočet konvoluce v čase $\Theta(nlogn)$.